

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Ιούνιος 2013

ΘΕΜΑ 1

Έστω p, q, r τρεις λογικές προτάσεις.

α) Να δείξετε ότι αν $p \Rightarrow q$ η είναι ψευδής τότε η $q \wedge (p \vee r)$ είναι ψευδής.

β) Να δείξετε ότι αν η πρόταση $q \Leftrightarrow r$ είναι αληθής τότε η $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$ είναι αληθής.

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $A = \{1\}$ να βρεθεί το σύνολο $P(P(P(A)))$.

β) Αν A, B, Γ, Δ είναι τέσσερα σύνολα, να δειχθούν οι ισότητες:

$$A \cup B = (A - B) \cup B \quad \text{και} \quad (A - B) \cap (\Gamma - \Delta) = (A \cap \Gamma) - (B \cup \Delta)$$

ΘΕΜΑ 3

Να εξεταστεί αν η σ είναι ανακλαστική (αυτοπαθής), συμμετρική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

β) Αν A και B είναι δύο ξένα σύνολα (δηλ. $A \cap B = \emptyset$), σ_1 είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο A

και σ_2 είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο B , να αποδείξετε ότι η $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $A \cup B$. Να δείξετε επίσης ότι η υπόθεση ότι τα A, B είναι ξένα δεν μπορεί να παραλειφθεί. (Υπόδειξη: Μπορείτε να βρείτε αντιπαράδειγμα στα σύνολα $A = \{1, 2\}$ και $B = \{2, 3\}$).

ΘΕΜΑ 4

α) Έστω A, B δύο σύνολα. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

i) Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη (1-1) συνάρτηση $f: A \rightarrow B$.

ii) Υπάρχει μια επί συνάρτηση $g: B \rightarrow A$.

β) Αν A είναι τυχαίο σύνολο να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει επί συνάρτηση $f: A \rightarrow P(A)$.

γ) Αν A είναι τυχαίο σύνολο να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f: P(A) \rightarrow A$.

ΘΕΜΑ 5

α) Να ορίσετε πλήρως το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β) Να αποδείξετε, με χρήση μόνο των αξιωμάτων, ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει

$-(x \cdot y) = (-x) \cdot y$ εξηγώντας αναλυτικά σε κάθε βήμα τα αξιώματα που θα χρησιμοποιήσετε.

ΘΕΜΑ 6

α) Να αποδείξετε το σύνολο \mathbb{Q} των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

β) Να δείξετε ότι:

$$(0, 1) - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \approx \mathbb{R}$$